3. Изобов Н. А. *О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1623–1630.

4. Изобов Н. А., Платонов А. С. *О существовании линейной системы Пфаффа с несвязным нижним характеристическим множеством положительной меры* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 65–71.

5. Изобов Н. А., Красовский С. Г., Платонов А. С. *Существование линейных систем Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной меры Лебега в пространстве* $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 10. С. 1311–1318.

6. Изобов Н. А., Красовский С. Г., Платонов А. С. *Линейные системы Пфаффа с нижним характеристическим множеством положительной* m *-меры Лебега* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 635–646.

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова[1], И.Н. Банщикова[2]

[1] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
ps@uni.udm.ru
[2] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия
banshhikova.irina@mail.ru

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{Z}$ — независимая переменная; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ — неизвестная функция; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ — управление; $A(k) \in M_n(\mathbb{R})$ — вещественная матрица размерами $n \times n$, $B(k) \in M_{nm}(\mathbb{R})$ — вещественная матрица размерами $n \times m$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$.

Будем предполагать, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|\bigr) < \infty, \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}}\|B(k)\| < \infty.$$

В дальнейшем управление $u(k)$ в системе (1) будет выбираться линейным по $x(k)$, т. е. иметь вид

$$u(k) = U(k)x(k),$$

где $U : \mathbb{Z} \to M_{mn}(\mathbb{R})$. Подставляя это управление в систему (1), получим замкнутую систему

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k). \tag{2}$$

Можно считать, что $U(k)$ играет роль матричного управления в системе (2).

Определение 1. Матричное управление $U : \mathbb{Z} \to M_{mn}(\mathbb{R})$ называется допустимым для системы (2), если выполнены условия:

1) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\|U(k)\| < \infty$;

2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k) + B(k)U(k)$ обратима, при этом

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| < \infty.$$

Определение 2. Функция $L:\mathbb{Z}\to M_n(\mathbb{R})$ называется матрицей Ляпунова, если для каждого $k\in\mathbb{Z}$ матрица $L(k)$ обратима и

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(\|L(k)\|+\|L^{-1}(k)\|\bigr)<\infty.$$

Если $L(k)$, $k\in\mathbb{Z}$ — матрица Ляпунова, то линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$y(k)=L(k)x(k),\quad k\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

называется преобразованием Ляпунова. Две линейные однородные системы с дискретным временем называются асимптотически эквивалентными (по Богданову), если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

Если две системы асимптотически эквивалентны, то поведение их решений при $k\to+\infty$ оказывается в некотором смысле «одинаковым», например, асимптотически эквивалентные системы одновременно устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы. Сохраняются также и числовые характеристики, описывающие поведение решений этих систем на бесконечности (например, показатели Ляпунова).

Определение 3. Будем говорить, что замкнутая система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, если для произвольной функции $C:\mathbb{Z}\to M_n(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\sup_{k\in\mathbb{Z}}\{\|C(k)\|+\|C^{-1}(k)\|\}<\infty$, существует допустимое матричное управление $U:\ \mathbb{Z}\to M_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) с управлением $U=U(k)$ асимптотически эквивалентна системе

$$y(k+1)=C(k)y(k),\quad k\in\mathbb{Z},\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

Определение 4 (Р. Калман [1], Е. Л. Тонков [2]). Система (1) называется равномерно вполне управляемой, если существуют такие $\alpha>0$ и $K\in\mathbb{N}$, что для каждых $x^1\in\mathbb{R}^n$ и $k_0\in\mathbb{N}$ существует управление $u(k)$, $k=k_0,k_0+1,\ldots,k_0+K-1$, такое, что решение $x(k)$ системы (1) с выбранным управлением u и начальным условием $x(k_0)=0$ удовлетворяет равенству $x(k_0+K)=x^1$, при этом $\|u(k)\|\leqslant\alpha\|x^1\|$ при всех $k=k_0,k_0+1,\ldots,k_0+K-1$.

Теорема. *Пусть* (1) *— периодическая равномерно вполне управляемая система. Тогда соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Литература

1. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.

2. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

НЕУПОРЯДОЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ, БЛУЖДАЕМОСТИ И ВРАЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н. Сергеев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
igniserg@gmail.com

Для натурального $n>1$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+,$$